CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A IX A

1. Se consideră funcțiile f, g: R → R, f(x) = ax + 3 şi g(x) = x + b.
a. Să se determine a şi b $\in$ R astfel încât M (-1,4) să fie punct comun graficelor G_f şi G_g.
b. Să se demonstreze că pentru a şi b determinați mai sus $G_f \perp G_g$.
c. Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor f, g şi axa Ox.

2. Un grădinar a plantat într-una dintre grădinile pe care le îngrijeşte parcele cu tufe de trandafir din soiuri distincte, astfel încât fiecare parcelă conține trandafiri dintr-un alt soi. Într-o zi are de realizat un aranjament floral din aceşti trandafiri. Analizează tufele şi procedează în felul următor: din prima parcelă taie trei trandafiri, din cea de a doua taie de două ori mai mulți decât din prima ş.a.m.d., tăind dintr-o parcelă de două ori mai mulți trandafiri decât din parcela precedentă.
a. Câte soiuri de trandafiri trebuie să folosească grădinarul pentru a realiza aranjamentul floral, astfel încât acesta să fie format din 6141 de trandafiri?
b. Care este numărul minim de trandafiri pe care trebuie să-l aibă parcela a IX-a pentru a putea fi folosită la realizarea aranjamentului floral?

3. Din mulțimea {-2; -1; 0; 1; 2} se aleg la întâmplare două elemente a şi b, nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?

4. Fie ABCD un patrulater convex şi punctele $M \in [AD]$, $N \in [BC]$ care împart segmentele [AD] şi [BC] în acelaşi raport m. Să se determine vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Se consideră mulțimea $A=\left\{k+\sqrt{n}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Să se demonstreze că $\mathbb{Z}\subset A$.

b) Să se demonstreze că $\sqrt{2}-1\in A$ şi $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{101}-10\in \mathrm{A}\cap\left(0,\dfrac{1}{20}\right)$.

2. a) Să de demonstreze că: $\log_2 5\in(2;3)$;

b) Să se rezolve ecuația $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$

3. Un şoricel se află la 20 paşi de adăpostul său. Pisica se află la 5 sărituri în spatele şoricelului şi începe urmărirea simultan cu fuga şoricelului spre adăpost. Când pisica face o săritură, şoricelul face 3 paşi. O săritură a pisicii este echivalentă cu 10 paşi ai şoricelului. Poate pisica să prindă şoricelul până la intrarea în adăpost ?

4. Un alfabet al extratereştrilor conține doar două litere: A şi B. Acest alfabet are următoarea proprietate: Dacă se şterge subcuvântul AB dintr-un cuvânt, sau se introduce într-o oarecare poziție a cuvântului ales subcuvântul BA sau subcuvântul AABB, atunci se obține un cuvânt sinonim cu cel ales. (se acceptă şi cuvinte formate dintr-o singură literă)

a) Aplicând oricare dintre cele trei operații unui cuvânt ales, diferența dintre numărul de litere A şi numărul de litere B se modifică ?

b) Cuvintele ABA şi BABA sunt sinonime ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XI A

1. La un concurs, în care punctajele se situează între 0 şi 100, s-au obținut rezultatele: 75; 21; 46; 82; 33; 11; 3; 95; 87; 63; 49; 51; 17; 29; 38; 77; 83; 59; 68; 41; 33; 27; 14; 63; 48; 46; 76; 75; 19; 92; 81; 16; 28; 49; 54; 71; 83; 66; 94; 25.
a) Grupați rezultatele concursului într-un tabel, în funcție de apartenența acestora la clasele statistice: [0; 20], (20; 50], (50; 90], (90; 100];
b) Determinați mediana seriei statistice formată cu notele obținute în concurs;
c) Dacă primii 25% dintre concurenți sunt premiați, determinați punctajul minim de obținere a unui premiu şi media notelor obținute de concurenții premiați.

2. Doi angajați au acelaşi salariu. Pe parcursul a trei ani, primului angajat i se reduce salariul cu 25 %, după care i se măreşte cu 25 %. Al doilea angajat suferă o diminuare a salariului cu 25 %, după care obține o majorare a salariului cu 10 %, apoi o altă majorare cu 15 %. Care dintre cei doi angajați va avea la final un salariu mai mare?

3. Se consideră graful orientat $G = \{X, U\}$.
a) Dacă $|X| = 5$ şi $U = \{(1,2), (4,1), (2,3), (2,5)\}$, determinați numărul minim de arce care trebuiesc adăugate pentru ca orice vârf să aibă gradul interior egal cu gradul exterior.
b) Dacă $|X| = 9$ şi $U = \{(2,1), (1,6), (2,5), (2,3), (3,4), (4,6), (5,7), (4,8), (8,9)\}$, determinați vârfurile legate de nodul 2 prin drumuri de lungime minimă egală cu a drumului minim dintre 2 şi 6.
c) Dacă $|X| = 10$, şirul gradelor vârfurilor sale poate fi 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9?

4. Păcală şi Tândală au primit salariul lunar în bancnote de 13 lei. Într-un magazin Păcală a cumpărat 9 pachete de biscuiți, 10 cârnăciori şi 7 ciocolate, iar Tândală a cumpărat 5 pachete de biscuiți, 7 cârnăciori şi o ciocolată. Prețurile unui pachet de biscuiți, al unui cârnăcior şi a unei ciocolate sunt numere întregi în lei. Păcală a plătit pentru toate cumpărăturile făcute de el un număr întreg de bancnote, fără sa primească rest.
Să se demonstreze că şi Tândală poate achita cumpărăturile făcute la fel.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII A

1. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet al clasei format din 3 fete şi 2 băieți.

2. Se consideră matricele: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$B = I_3 + A$ şi $C = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

a. Să se calculeze $S = A - XY$

b. Să se determine $a \in R$ astfel încât $BC = I_3$

c. Să se demonstreze că $A^4 = 14^3 \cdot A$ şi apoi faptul că $A^{n+1} = 14^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Doi elevi E_1 şi E_2 joacă următorul joc:
Înlocuiesc, succesiv elementele unei matrice pătratice de ordinul al doilea cu numere întregi, punând pe fiecare linie câte un număr.
Jocul este început de elevul E_1.
Câştigă jocul elevul care în urma completării tuturor elementelor matricei, face ca modulul determinantului matricei să fie un număr par.
Să se demonstreze că elevul E_2 poate aplica acea strategie care îl duce la câştig, indiferent de numerele completate de elevul E_1.

4. Într-un plan, raportat la reperul ortogonal de axe de coordonate (xOy) se dau punctele: A(0;6); B(a;4); C(-1;4).
a. Să se determine $a \in R$ astfel încât punctele A, B şi C să fie coliniare.
b. Pentru a = 5 să se determine aria triunghiului ABC.
c. Pentru a = 5 să se scrie ecuația medianei corespunzătoare laturii BC.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*